

А. И. Короткий, И. А. Цепелев,  
А. Т. Исмаил-заде, Б. М. Наймарк

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ\*

### 1. Введение

В работе рассматривается задача численного моделирования медленной трехмерной свободной тепловой конвекции неоднородной высоковязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Подобные задачи часто привлекаются в геофизике для моделирования различных процессов, происходящих в земных недрах [1–5]. В частности, определенный интерес представляют моделирование процессов эволюции соляных и глиняных структур, а также процессов формирования и развития осадочных бассейнов, численный анализ тепловой конвекции в мантии и многие другие задачи. Однако трехмерное численное моделирование подобных процессов, как наиболее адекватно отражающее эти процессы, сопряжено с большими объемами вычислений, которые под силу только мощным компьютерам. Поэтому важным моментом здесь является разработка эффективных методов численного решения задачи. Кроме того, довольно часто возникает необходимость в разработке специальных методов численной реализации задачи, которые согласовывались бы с архитектурой используемого вычислителя. В данной работе предлагаются методы и алгоритмы, которые могут быть использованы для численного моделирования упомянутых задач на современных параллельных компьютерах.

Численное моделирование рассматриваемой задачи опирается на общие соотношения, описывающие конвективное движение неоднородной вязкой жидкости: уравнение сохранения количества движения, уравнение сохранения теплового баланса, уравнения переноса характеристик сплошной среды, уравнения состояния. Эти соотношения модифицируются и упрощаются с учетом особенностей рассматриваемой жидкости и ее движения (высокая вязкость, медленное движение). Из уравнения движения удаляются инерционные члены (поскольку для характерных движений изучаемой жидкости

---

\* Работа поддержана РФФИ (№99-07-90441, 99-05-65050) и Международным научнотехническим центром (№99-1293).

числа Фруда и Рейнольдса очень малы), и тогда оно переходит в соответствующее квазистационарное уравнение Стокса (это упрощение можно рассматривать также как способ решения соответствующего уравнения с малым параметром при производной по времени). Вводится векторный потенциал для скорости движения среды, и уравнение движения преобразуются с помощью операции вихря (это позволяет избавиться от условия несжимаемости и давления в уравнении движения). Векторный потенциал скорости аппроксимируется линейной комбинацией подходящих базисных элементов, состоящих из некоторых локализованных трикубических сплайнов. Аппроксимация находится методом конечных элементов из соответствующего вариационного равенства, в которое преобразуется уравнение движения Стокса. Для коэффициентов аппроксимации выписывается соответствующая система линейных алгебраических уравнений, которая уже при сравнительно небольших сеточных разбиениях расчетной области имеет большую размерность. Особенность этой системы состоит в том, что она является невырожденной (благодаря специальному подбору системы базисных элементов в методе конечных элементов), но мера обусловленности матрицы этой системы стремится к бесконечности при сгущении сетки в расчетной области. Такие системы уравнений должны будут многократно решаться, поскольку коэффициенты системы и ее правые части будут обновляться с каждым новым шагом по времени. Это накладывает некоторые условия на выбор методов решения таких систем, и параллельные методы решения здесь имеют явное преимущество, поскольку на их решение уходит основная часть времени расчета задачи. Плотность и вязкость находятся из соответствующих уравнений с частными производными первого порядка (уравнений переноса) или в результате решения семейства обыкновенных дифференциальных уравнений, задающих характеристики уравнений переноса. Температура находится из уравнения теплового баланса методом конечных разностей.

Работа продолжает исследования авторов [5–9]. Численное решение подобных задач довольно трудоемко из-за больших размерностей дискретных аппроксимаций. Существенных продвижений здесь удалось достигнуть благодаря использованию специальных базисных элементов в методе конечных элементов и благодаря найденным нами двухкомпонентным и однокомпонентным представлениям векторного потенциала скорости. Это позволило сократить объемы вычислений и получить приемлемые качественные и количественные результаты при сравнительно небольших размерностях дискретных задач. Алгоритмы численного моделирования задачи не используют никаких симметрий, которые иногда привлекаются для упрощения задач и сокращения объемов вычислений. В конце работы приводятся результаты расчетов модельной задачи.

## 2. Описание модели и постановка задачи

В пространственной области  $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3)$  рассматривается свободное конвективное медленное движение вязкой неоднородной несжимаемой жидкости, находящейся в поле силы тяжести под действием некоторого теплового поля. Это движение в декартовых координатах описывается следующими хорошо известными уравнениями [10–12]:

уравнением сохранения количества движения (уравнением Стокса)

$$\nabla p = \operatorname{div}(\mu e_{ij}) + \vec{F}, \quad (2.1)$$

уравнением несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (2.2)$$

уравнением теплового баланса (уравнением теплопроводности)

$$\partial(\rho c T)/\partial t + \langle \vec{u}, \nabla(\rho c T) \rangle = \operatorname{div}(k \nabla T) + \mu \Phi + \rho Q, \quad (2.3)$$

уравнением состояния для плотности

$$\rho(t, x) = \rho_*(t, x)(1 - \alpha(T(t, x) - T_0)), \quad (2.4)$$

реологическим уравнением для вязкости

$$\mu(t, x) = \mu_*(t, x) \exp\left(\frac{E + \rho_* g x_3 V}{RT}\right), \quad (2.5)$$

уравнениями переноса плотности и вязкости

$$\partial \rho_*/\partial t + \langle \nabla \rho_*, \vec{u} \rangle = 0, \quad \partial \mu_*/\partial t + \langle \nabla \mu_*, \vec{u} \rangle = 0. \quad (2.6)$$

Здесь  $t$  — время;  $x$  — точка пространства с декартовыми координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ ;  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$  — вектор скорости жидкости в момент времени  $t$  и точке пространства  $x$ ;  $p = p(t, x)$  — давление жидкости в соответствующий момент времени и соответствующей точке пространства;  $T = T(t, x)$  — абсолютная температура жидкости;  $\rho = \rho(t, x)$  — плотность жидкости;  $\mu = \mu(t, x)$  — вязкость жидкости;  $\rho_* = \rho_*(t, x)$  — температурно-невозмущенная плотность;  $\mu_* = \mu_*(t, x)$  — температурно-невозмущенная вязкость;  $g$  — ускорение свободного падения;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\vec{F} = -g\rho\vec{e}_3 = (0, 0, -g\rho)$  — плотность вектора внешних массовых (гравитационных) сил;  $\vec{e}_3$  — орт на оси  $Ox_3$ ;  $c$  — удельная теплоемкость жидкости;  $k$  — коэффициент теплопроводности жидкости;  $\alpha$  — коэффициент теплового объемного расширения;  $E$  — энергия активации;  $V$  — объем активации;  $\Phi = \Phi(t, x)$  — диссипативная

функция, характеризующая генерацию тепла, обусловленную внутренним трением;  $Q = Q(t, x)$  — удельная мощность других (не связанных с вязкостью) внутренних источников тепла;  $T_0$  — характерное значение температуры;  $e_{ij} = e_{ij}(\vec{u})$  — тензор скоростей деформаций;

$$\operatorname{div}(\mu e_{ij}) = \left( \sum_{m=1}^3 \frac{\partial (\mu e_{m1})}{\partial x_m}, \sum_{m=1}^3 \frac{\partial (\mu e_{m2})}{\partial x_m}, \sum_{m=1}^3 \frac{\partial (\mu e_{m3})}{\partial x_m} \right);$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (e_{ij})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i \right)^2.$$

На границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  для поля скоростей задается граничное условие непротекания с идеальным скольжением. Для температуры на боковых гранях параллелепипеда  $\Omega$  будет рассматриваться граничное условие отсутствия теплового потока (однородное условие Неймана), на нижней и верхней гранях  $\Omega$  будут задаваться некоторые температурные режимы (неоднородные условия Дирихле). В развернутой по координатной форме эти граничные условия имеют вид

$$\Gamma(x_1 = 0) \cup \Gamma(x_1 = l_1): \quad u_1 = \partial u_2 / \partial x_1 = \partial u_3 / \partial x_1 = 0, \quad \partial T / \partial x_1 = 0; \quad (2.7)$$

$$\Gamma(x_2 = 0) \cup \Gamma(x_2 = l_2): \quad u_2 = \partial u_1 / \partial x_2 = \partial u_3 / \partial x_2 = 0, \quad \partial T / \partial x_2 = 0; \quad (2.8)$$

$$\Gamma(x_3 = 0): \quad u_3 = \partial u_1 / \partial x_3 = \partial u_2 / \partial x_3 = 0, \quad T = T_1(t, x_1, x_2); \quad (2.9)$$

$$\Gamma(x_3 = l_3): \quad u_3 = \partial u_1 / \partial x_3 = \partial u_2 / \partial x_3 = 0, \quad T = T_2(t, x_1, x_2), \quad (2.10)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — заданные функции, характеризующие температуру на нижней и верхней гранях параллелепипеда  $\Omega$ .

Для температуры, плотности и вязкости задаются начальные условия

$$T(t_0, x) = T_0(x), \quad \rho_*(t_0, x) = \rho_0(x), \quad \mu_*(t_0, x) = \mu_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.11)$$

где  $T_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\mu_0$  — заданные функции, характеризующие температуру, температурно-невозмущенные плотность и вязкость в начальный момент времени  $t = t_0$ .

Уравнения (2.1)–(2.6) вместе с граничными (2.7)–(2.10) и начальными условиями (2.11) составляют полную систему соотношений для расчета неизвестных функций  $u_1 = u_1(t, x)$ ,  $u_2 = u_2(t, x)$ ,  $u_3 = u_3(t, x)$ ,  $T = T(t, x)$ ,  $p = p(t, x)$ ,  $\rho = \rho(t, x)$ ,  $\mu = \mu(t, x)$  в области  $\Omega$  при  $t > t_0$ . В расчете этих функций и состоит основная задача.

Выполним теперь некоторые преобразования, упрощающие задачу. Исключим из рассмотрения уравнение несжимаемости  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$  и давление

$p$ . Для этой цели введем векторный потенциал  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  по формуле  $\vec{u} = \text{rot } \vec{\psi}$  и выполним операцию вихря  $\text{rot}$  над равенством (2.1). Тогда, учитывая равенства  $\text{rot}(\nabla p) = 0$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{\psi}) = 0$ , вместо (2.1) получим систему уравнений для нахождения потенциала  $\vec{\psi}$ :

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2(\mu e_{i3})}{\partial x_2 \partial x_i} - \frac{\partial^2(\mu e_{i2})}{\partial x_3 \partial x_i} \right] = g \frac{\partial \rho}{\partial x_2}, \quad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2(\mu e_{i3})}{\partial x_1 \partial x_i} - \frac{\partial^2(\mu e_{i1})}{\partial x_3 \partial x_i} \right] = g \frac{\partial \rho}{\partial x_1}, \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2(\mu e_{i2})}{\partial x_1 \partial x_i} - \frac{\partial^2(\mu e_{i1})}{\partial x_2 \partial x_i} \right] = 0. \quad (2.14)$$

Соотношения (2.12)–(2.14) можно представить в вариационном виде, удобном для применения метода конечных элементов. Умножим эти равенства на соответствующие компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  допустимой пробной вектор-функции  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , обладающей такой же гладкостью и удовлетворяющей таким же граничным условиям, что и функция  $\vec{\psi}$ . Результаты проинтегрируем по области  $\Omega$ , сложим и перебросим (с помощью формулы интегрирования по частям) внешние вторые производные на пробные функции. Эти операции приведут к следующему вариационному равенству для векторного потенциала:

$$E(\vec{\psi}, \vec{\omega}) = L(\vec{\omega}) \quad \text{для любой допустимой пробной вектор-функции } \vec{\omega}, \quad (2.15)$$

где  $E$  и  $L$  — соответствующие билинейная и линейная формы:

$$E = \int_{\Omega} \mu [2e_{11}\tilde{e}_{11} + 2e_{22}\tilde{e}_{22} + 2e_{33}\tilde{e}_{33} + e_{12}\tilde{e}_{12} + e_{13}\tilde{e}_{13} + e_{23}\tilde{e}_{23}] dx, \quad (2.16)$$

$$L = \int_{\Omega} (g \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \omega_2 - g \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \omega_1) dx = g \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) dx,$$

величины  $\tilde{e}_{ij}$  выражаются через  $\vec{\omega}$  по таким же формулам, по каким величины  $e_{ij}$  выражаются через  $\vec{u}$ . Билинейная форма  $E(\vec{\psi}, \vec{\omega})$  симметрична и неотрицательна, но она не является положительно определенной (в противном случае потенциал определялся бы однозначно, что, как легко видеть из равенства  $\vec{u} = \text{rot } \vec{\psi}$ , явно не так [6–9]).

На самом деле оказывается, что всякое достаточно гладкое векторное поле  $\vec{u}$ , удовлетворяющее соотношениям (2.1)–(2.2) и граничным условиям (2.7)–(2.10), можно представить (без дополнительных предположений и упрощений) в виде

$$\vec{u} = \text{rot } \vec{\psi}, \quad \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, 0) \quad (2.17)$$

с достаточно гладким двухкомпонентным потенциалом, удовлетворяющим тем же соотношениям (2.12)–(2.14) и граничным условиям

$$\Gamma(x_1 = 0) \cup \Gamma(x_1 = l_1) : \quad \psi_2 = 0, \quad \partial\psi_1/\partial x_1 = 0 = \partial^2\psi_2/\partial x_1^2; \quad (2.18)$$

$$\Gamma(x_2 = 0) \cup \Gamma(x_2 = l_2) : \quad \psi_1 = 0, \quad \partial\psi_2/\partial x_2 = 0 = \partial^2\psi_1/\partial x_2^2; \quad (2.19)$$

$$\Gamma(x_3 = 0) \cup \Gamma(x_3 = l_3) : \quad \psi_1 = 0 = \psi_2, \quad \partial^2\psi_1/\partial x_3^2 = 0 = \partial^2\psi_2/\partial x_3^2. \quad (2.20)$$

Это означает, что векторный потенциал  $\vec{\psi}$  можно априори искать в виде (2.17) и вместо трех компонент потенциала рассчитывать только две, что значительно сократит объемы вычислений и время расчетов. Следует только иметь в виду, что теперь в равенстве (2.17)

$$u_1 = -\partial\psi_2/\partial x_3, \quad u_2 = \partial\psi_1/\partial x_3, \quad u_3 = \partial\psi_2/\partial x_1 - \partial\psi_1/\partial x_2.$$

При численном решении уравнения теплового баланса можно ограничиться приближением Обербека–Буссинеска [10] этого уравнения

$$\partial(\rho_* c T)/\partial t + \langle \vec{u}, \nabla(\rho_* c T) \rangle = \operatorname{div}(k \nabla T) + \mu \Phi + \rho Q. \quad (2.21)$$

Таким образом, задача фактически свелась к расчету функций  $\psi_1 = \psi_1(t, x)$ ,  $\psi_2 = \psi_2(t, x)$ ,  $T = T(t, x)$ ,  $\rho = \rho(t, x)$ ,  $\mu = \mu(t, x)$ , удовлетворяющих при  $t > t_0$  в области  $\Omega$  уравнениям (2.12)–(2.14), (2.3) [или (2.21)], (2.4)–(2.6), а также заданным граничным и начальным условиям (2.18)–(2.20), (2.7)–(2.11). Вместо уравнений (2.12)–(2.14) может использоваться вариационное равенство (2.15). Функцию  $p$  при желании можно определить из равенства (2.1) с точностью до некоторой постоянной.

*Замечание.* Отметим, что при решении задачи с постоянной  $\mu = \text{const}$  или горизонтально-однородной вязкостью  $\mu = \mu(t, x_3)$  ситуацию можно значительно упростить, если вместо трехкомпонентного потенциала  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  или двухкомпонентного потенциала  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, 0)$  априори использовать «однокомпонентный» потенциал

$$\vec{\psi} = \operatorname{rot}(\varphi \vec{e}_3) = (\partial\varphi/\partial x_2, -\partial\varphi/\partial x_1, 0), \quad (2.22)$$

где  $\varphi = \varphi(t, x)$  — некоторая искомая функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$\Gamma(x_1 = 0) \cup \Gamma(x_1 = l_1) : \quad \partial\varphi/\partial x_1 = 0 = \partial^3\varphi/\partial x_1^3; \quad (2.23)$$

$$\Gamma(x_2 = 0) \cup \Gamma(x_2 = l_2) : \quad \partial\varphi/\partial x_2 = 0 = \partial^3\varphi/\partial x_2^3; \quad (2.24)$$

$$\Gamma(x_3 = 0) \cup \Gamma(x_3 = l_3) : \quad \varphi = 0 = \partial^2\varphi/\partial x_3^2. \quad (2.25)$$

В данном случае достаточно гладкое векторное поле  $\vec{u}$ , удовлетворяющее соотношениям (2.1)–(2.2) и граничным условиям (2.7)–(2.10), допускает представление  $\vec{u} = \text{rot } \vec{\psi}$  с достаточно гладким «однокомпонентным» потенциалом (2.22), удовлетворяющим граничным условиям (2.23)–(2.25). Это вытекает из выражения поля  $\vec{\psi}$  в виде

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi_1(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_3} u_2(t, x_1, x_2, \xi) d\xi + \partial w / \partial x_1, \\ \psi_2 &= \psi_2(t, x_1, x_2, x_3) = - \int_0^{x_3} u_1(t, x_1, x_2, \xi) d\xi + \partial w / \partial x_2, \\ \psi_3 &= \psi_3(t, x_1, x_2, x_3) = \partial w / \partial x_3\end{aligned}$$

при соответствующем подборе скалярной функции  $w = w(t, x)$ .

Таким образом, в указанных выше случаях нахождение поля скоростей  $\vec{u}$  можно свести к расчету только одной скалярной функции  $\varphi$ , удовлетворяющей уравнениям (2.12)–(2.14) [или вариационному равенству (2.15)] и граничным условиям (2.23)–(2.25). Следует только учесть, что

$$u_1 = -\partial^2 \varphi / \partial x_1 \partial x_3, \quad u_2 = \partial^2 \varphi / \partial x_2 \partial x_3, \quad u_3 = -\partial^2 \varphi / \partial x_1^2 - \partial^2 \varphi / \partial x_2^2.$$

### 3. Численная реализация задачи

Опишем кратко схему численного решения поставленной задачи. Зададим априори некоторое равномерное разбиение оси времени точками  $t_n = t_0 + \tau n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , где  $\tau$  — диаметр разбиения. Далее организуется итерационный процесс по  $n$ , в котором  $n$  последовательно принимает целые значения от 0 до  $m$  (натуральное число  $m$  задается до расчетов, чтобы обозначить длину промежутка интегрирования  $[t_0, t_m]$ ). При желании итерационный процесс может быть продолжен далее, начиная с момента времени  $t_m$  как начального. На каждой временной итерации последовательно выполняются следующие три шага.

*Шаг 1* : по распределениям температуры  $T = T(t_n, \cdot)$ , температурно-возмущенных плотности  $\rho_* = \rho_*(t_n, \cdot)$  и вязкости  $\mu_* = \mu_*(t_n, \cdot)$ , соответствующих моменту времени  $t = t_n$ , из равенств (2.4) и (2.5) находятся распределения температурно-возмущенных плотности  $\rho = \rho(t_n, \cdot)$  и вязкости  $\mu = \mu(t_n, \cdot)$ , соответствующих этому же моменту времени  $t = t_n$ , затем из уравнений (2.12)–(2.14) или вариационного равенства (2.15) с учетом соответствующих граничных условий находится распределение потенциала  $\vec{\psi} = \vec{\psi}(t_n, \cdot)$  и из равенства (2.17) находится распределение поля скоростей  $\vec{u} = \vec{u}(t_n, \cdot)$ .

*Шаг 2* : по распределениям поля скоростей  $\vec{u} = \vec{u}(t_n, \cdot)$ , температурно-возмущенных плотности  $\rho = \rho(t_n, \cdot)$  и вязкости  $\mu = \mu(t_n, \cdot)$  из уравнений (2.3) [или (2.21)] с учетом соответствующих граничных условий находится новое распределение температуры  $T = T(t_{n+1}, \cdot)$ , соответствующее моменту времени  $t = t_{n+1}$ .

*Шаг 3* : по распределениям поля скоростей  $\vec{u} = \vec{u}(t_n, \cdot)$ , температурно-невозмущенных плотности  $\rho_* = \rho_*(t_n, \cdot)$  и вязкости  $\mu_* = \mu_*(t_n, \cdot)$  из уравнений (2.6) находятся новые распределения температурно-невозмущенных плотности  $\rho_* = \rho_*(t_{n+1}, \cdot)$  и вязкости  $\mu_* = \mu_*(t_{n+1}, \cdot)$ , соответствующие моменту времени  $t = t_{n+1}$ .

Таким образом, после выполнения итерационного процесса будут получены распределения температуры  $T = T(t_n, \cdot)$ , потенциала  $\vec{\psi} = \vec{\psi}(t_n, \cdot)$ , поля скоростей  $\vec{u} = \vec{u}(t_n, \cdot)$ , температурно-невозмущенных плотности  $\rho_* = \rho_*(t_n, \cdot)$  и вязкости  $\mu_* = \mu_*(t_n, \cdot)$ , температурно-возмущенных плотности  $\rho = \rho(t_n, \cdot)$  и вязкости  $\mu = \mu(t_n, \cdot)$ , соответствующие моментам времени  $t = t_n$ ,  $n = 0, \dots, m$ . Имея эти распределения, с помощью интерполяции при желании можно восстановить картину процесса в целом на отрезке времени  $[t_0, t_m]$  более детально. Диаметр делений по оси времени может выбираться автоматически так, чтобы максимальное смещение точек среды не превосходило заданной достаточно малой величины.

Рассмотрим теперь некоторые общие моменты приближенного решения основных уравнений, определяющих искомые функции. Приближенное нахождение векторного потенциала  $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, 0)$  и температурно-невозмущенных плотности  $\rho_*$  и вязкости  $\mu_*$  можно осуществить, к примеру, методом конечных элементов при специальном выборе базисных элементов. Построение базисных элементов и реализация самого метода конечных элементов для подобных задач достаточно подробно описаны в работах [6–8]. Аппроксимация векторного потенциала здесь также будет осуществляться с помощью линейной комбинации трикубических базисных элементов (представимых в виде тензорного произведения подходящих кубических сплайнов):

$$\psi_p(t, x_1, x_2, x_3) \approx \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \psi_{ijk}^{(p)}(t) s_i^{(1,p)}(x_1) s_j^{(2,p)}(x_2) s_k^{(3,p)}(x_3), \quad p = 1, 2. \quad (3.1)$$

Аппроксимация плотности и вязкости будет осуществляться линейными комбинациями подходящих трилинейных базисных элементов (представимых в виде тензорного произведения некоторых линейных сплайнов)

$$\rho_*(t, x_1, x_2, x_3) \approx \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \rho_{ijk}(t) s_i^{(1)}(x_1) s_j^{(2)}(x_2) s_k^{(3)}(x_3), \quad (3.2)$$



$$\mu_*(t, x_1, x_2, x_3) \approx \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} \mu_{ijk}(t) s_i^{(1)}(x_1) s_j^{(2)}(x_2) s_k^{(3)}(x_3). \quad (3.3)$$

Использование трилинейных базисных элементов позволяет достаточно хорошо аппроксимировать разрывные характеристики среды.

После подстановки приближений (3.1)–(3.3) в (2.15) или (2.12)–(2.14) задача определения приближения векторного потенциала при заданных распределениях плотности и вязкости сводится к решению относительно неизвестных коэффициентов  $\{\psi_{ijk}^{(p)}(t)\}$  системы линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной ленточной матрицей. Однако по мере сгущения сетки обусловленность системы ухудшается (число обусловленности матрицы системы стремится к бесконечности). Это приводит к определенным трудностям при решении таких систем уравнений при больших размерностях (итерационные методы начинают медленно сходиться, а в ряде случаев из-за ошибок округления могут вообще расходиться). Здесь для решения систем уравнений будет использоваться прямой метод квадратного корня. Некоторые варианты применения этого метода для ЭВМ параллельного действия с распределенными ресурсами приведены и использовались в [6, 9, 13].

После подстановки приближений (3.2) и (3.3) в (2.6) задача определения приближений плотности и вязкости, при заданном распределении вектора скорости, сводится к решению систем линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $\{\rho_{ijk}(t)\}$  и  $\{\mu_{ijk}(t)\}$ . Для решения этих дифференциальных уравнений требуется применять специальные численные методы [14]. Температурно-невозмущенные плотность и вязкость здесь будут находиться методом характеристик, т.е. методом сноса начальных условий вдоль характеристик уравнений (2.6) (см. подробности в [6]–[8]). Этот метод позволяет проводить расчеты с небольшими диссипациями плотности и вязкости [6, 9, 14]. Уравнения переноса имеют характеристики [11, 14], описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx(t)/dt = \vec{u}(t, x(t)).$$

Вдоль характеристик температурно-невозмущенные плотность и вязкость сохраняют постоянные значения:

$$\rho_*(t, x(t)) = \rho_0(x(t_0)), \quad \mu_*(t, x(t)) = \mu_0(x(t_0)), \quad t \geq t_0.$$

Эти формулы позволяют организовать нахождение плотности и вязкости в области  $\Omega$  в момент времени  $t > t_0$  по известным распределениям плотности и вязкости в начальный момент времени и по известным полям скоростей

до момента времени  $t$ , которые уже должны быть рассчитаны к этому моменту времени. Применение трилинейных базисных элементов для аппроксимации плотности и вязкости позволяет организовать достаточно большое число независимых модулей, которые параллельно рассчитывают характеристики уравнений переноса и соответственно плотность и вязкость вдоль них. Отметим, что плотность и вязкость могут аппроксимироваться на более мелкой сетке, чем векторный потенциал.

Аппроксимацию температуры  $T = T(t, x)$  можно проводить сеточными методами. Производные  $\partial u_i / \partial x_j$  находятся дифференцированием соотношения  $\vec{u} = \text{rot } \vec{\psi}$  с учетом (3.1). Для нахождения температуры здесь выбран неявный итерационный метод переменных направлений [14]. На каждой итерации по времени решается большое число систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, при этом можно организовать соответствующее число независимых модулей, которые параллельно решают эти системы методом прогонки.

Таким образом, процедура численного решения поставленной задачи сводится к следующим основным моментам: 1) решению системы линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов разложения векторного потенциала скорости по базисным элементам; 2) интегрированию уравнения теплопроводности; 3) интегрированию уравнений переноса плотности и вязкости. Выполнение этих фрагментов сопряжено с проведением больших объемов вычислений. Некоторые способы тестирования предлагаемой вычислительной методики и результаты тестирования приведены в [5–8]. Ниже приводятся результаты расчета модельного примера в соответствии с описанной вычислительной схемой.

#### 4. Результаты расчета модельной задачи

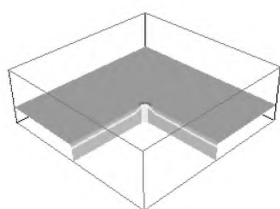
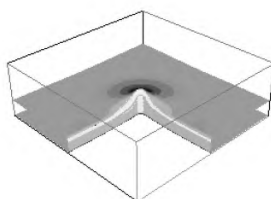
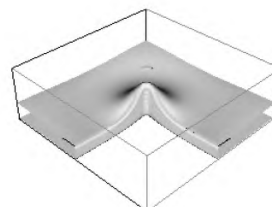
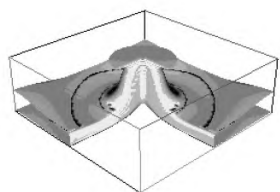
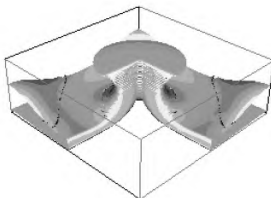
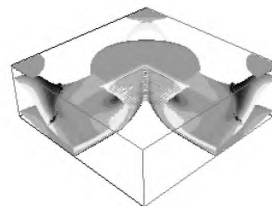
В качестве модельного примера рассмотрим движение жидкости в параллелепипеде  $\bar{\Omega} = [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 1]$ . В начальный момент времени  $t_0 = 0$  полагаем  $\rho_0(t, x) \equiv 1$ ,  $\mu_0(t, x) \equiv 1$ ,  $T_0(x) = 1.05 - x_3/l_3$ . На грани  $\Gamma(x_3 = l_3)$  полагаем  $T_2 \equiv 0.05$ , на грани  $\Gamma(x_3 = 0)$  считаем  $T_1 \equiv 1.05$ . Пусть  $Q = 0$ . Чтобы вывести жидкость из состояния неустойчивого равновесия, в начальный момент времени в точке  $x_0 = (3/2, 3/2, 1/3)$  задается некоторое малое тепловое возмущение, которое и приводит к образованию диапира.

Для реальных процессов, происходящих в верхних слоях Земли, в качестве характерных значений можно принять:  $g = 9.8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ;  $\alpha = 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ ;  $\rho = 2.2 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ;  $\mu = 10^{18} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ;  $l = 25 \times 10^3 \text{ м}$ ;  $k = 3 \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $c = 1250 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ ;  $T = 673 \text{ К}$ ;  $E = 2 \times 10^4 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1}$ ;  $V = 4 \times 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}$ ;  $R = 8.3 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ .

При расчете задачи выбиралась сетка  $25 \times 25 \times 25$  для аппроксимации векторного потенциала и вязкости, для аппроксимации плотности и температуры бралась сетка  $73 \times 73 \times 73$ . Шаг по времени равен 0.1. В таблице приведены характеристики расчета модельного примера на различных компьютерах параллельного действия с распределенной памятью.

ЭВМ	Процес- соры	Время	Тип CPU, МГц	Скорость обмена, Мб/с
MBC-100	30	180'	I860/80	1
MBC-1000	8	7'15"	Alpha/300	10
Alpha	2	55'	Alpha/540	10
IBM SP2	16	3'25"	RS6000/133	3

На рисунках показана эволюция во времени изотермы  $T = 0.9$ . Отражены моменты безразмерного времени  $t = 0, t = 60, t = 70, t = 80, t = 100, t = 120$ . Для того чтобы наглядно отразить внутреннюю структуру объекта, на рисунках удалена его фронтальная часть.

 $t = 0$  $t = 60$  $t = 70$  $t = 80$  $t = 100$  $t = 120$

## Литература

1. ТУРКОТТ Д., ШУБЕРТ Дж. Геодинамика. М.: Мир, 1985.
2. CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.
3. MCKENZIE D. P., ROBERTS J. M., WEISS N. O. Convection in the Earth's mantle: towards a numerical simulation // J. Fluid Mechanics. 1974. Vol.62. P.465–538.
4. РЫКОВ В. В., ТРУБИЦЫН В. П. Численное моделирование трехмерной мантийной конвекции и тектоники континентальных плит // Вычислительная сейсмология. М.: Наука, 1994. Вып.26. С.94–102.
5. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., ЛОБКОВСКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М. Гидродинамическая модель формирования осадочных бассейнов в результате образования и последующего фазового перехода магматической линзы в верхней мантии // Вычислительная сейсмология. М.: Наука, 1994. Вып.26. С.139–155.
6. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М. и др. Реализация трехмерной гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // ЖВМ и МФ. 1998. №7. С.1190–1203.
7. НАЙМАРК Б. М., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И. и др. Моделирование трехмерных вязких течений в верхних слоях мантии // Вычислительная сейсмология. М.: ГЕОС. 1998. Вып.30. С.3–15.
8. НАЙМАРК Б. М., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И. и др. Численная реализация гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // Тр. ИММ УрО РАН, 1998. Т.5. С.142–172.
9. КОРОТКИЙ А. И., ЦЕПЕЛЕВ И. А., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т. и др. Параллельные алгоритмы моделирования движения неоднородной вязкой жидкости // Изв. Урал. гос. ун-та. 1999. №14. (Математика и механика. Вып.2.) С.65–76.
10. ЛАНДАУ Л. Д., ЛИФШИЦ Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
11. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
12. АНТОНЦЕВ С. Н., КАЖИХОВ А. В., МОНАХОВ В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
13. ОРТЕГА Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.
14. МАРЧУК Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

*Статья поступила 25.05.2000 г.*